SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1993-94

Angelo Favini

EQUAZIONI DEGENERI DEL SECONDO ORDINE ED APPLICAZIONI AD EQUAZIONI DI TIPO IPERBOLICO-PARABOLICO

10 febbraio 1994

Tecnoprint - Bologna 1994

Riassunto. In questa nota presentiamo un metodo generale, connesso alla teoria dei semigruppi generati da trasformazioni lineari multivoche, che permette di stabilire l'esistenza di soluzioni regolari (nel tempo) del problema di evoluzione in uno spazio di Hilbert H

$$L\frac{d^2u}{dt^2} + B\frac{du}{dt} + Au = f \quad \text{in } [0,T],$$
$$u(0) = u_0, \frac{du}{dt}(0) = u_1,$$

dove A, B, L sono opportuni operatori lineari da H in sé e L non é necessariamente invertibile.
Viene descritta una applicazione ad una equazione alle derivate parziali di tipo iperbolico-parabolico.

Abstract. In this note we indicate a general method, related to the theory of semigroups generated by multivalued linear operators, allowing to establish existence of regular solutions (in time) of the evolution problem in a Hilbert space H

$$L\frac{d^2u}{dt^2} + B\frac{du}{dt} + Au = f \quad \text{in } [0,T],$$
$$u(0) = u_0, \frac{du}{dt}(0) = u_1,$$

where A, B, L are suitable linear operators from H into itself and L is not necessarily invertible.
We describe an application of the abstract results to a partial differential equation of hyperbolic-parabolic type.

1. Introduzione

In un recente lavoro, scritto in collaborazione con Pierluigi Colli [4], si è discussa la risolubilità del problema di Cauchy per equazioni di evoluzione della forma

$$(P)\qquad \begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} + B\,\frac{du}{dt} + Au \ni f \text{ in } (0,T) \\ u(0) = u_0\,,\ \frac{du}{dt}(0) = u_1, \end{cases}$$

dove $L : H \to H$ e $A : V \to V'$ sono operatori lineari limitati e autoaggiunti, V e H sono spazi di Hilbert tali che $V \subset H$ densamente, e quindi, dopo aver identificato H col suo duale, $H \subset V'$ densamente. L può essere degenere, cioè non invertibile.
Quanto a B, si suppone nonlineare e multivoco da V in V', precisamente, che sia massimale monotono da V a V'.
Il caso B lineare e limitato in H è stato trattato da Bensoussan, Lions e Papanicolau in [2], i quali hanno stabilito esistenza ed unicità della soluzione debole. Estensioni di questi risultati sono state date da vari matematici sudamericani. Mi limito a ricordare i contributi di O.A. de Lima [7], A.B. Maciel [9] e M.A. Medeiros [10], dove si permette alla f di dipendere da u e agli operatori L e B di dipendere dal tempo. Altri esempi importanti di applicazioni si possono trovare nella monografia di V. Barbu [1] e nel famoso articolo di J.L. Lions e W.A. Strauss [8].
Richiamo velocemente le ipotesi fatte in Colli e Favini [4] per chiarire subito il tipo di equazioni che studiamo. Supposti A e L due operatori definiti da forme bilineari simmetriche $a : V\times V \to R$ e $l : H\times H \to R$, rispettivamente, si richiede che

$$|\,l(u,v)\,| \le C\,\|u\|_H\,\|v\|_H\,,\quad \forall u, v\in H,$$
$$l(u,u) \ge 0\quad \forall u\in H$$
$$|\,a(u,v)\,| \le C\,\|u\|_V\,\|v\|_V\,,\quad \forall u, v\in V$$
$$a(u,u) \ge \omega\,\|u\|_V^2\,,\quad \omega > 0,\ u\in V.$$

Quanto a B, viene assunto che esso sia massimale monotono da V in V' (con dominio $\mathcal{D}(B) \subseteq V$) e che L+B sia fortemente monotono in H, nel senso che esista C>0 tale che, se (,) denota sia il prodotto interno in H che la dualità fra V' e V, risulti

$$(L(v_1-v_2) + w_1-w_2,\ v_1-v_2) \ge C\,\|v_1-v_2\|_H{}^2\,,$$
$$\forall v_1,v_2\in \mathcal{D}(B),\quad \forall w_j\in Bv_j,\ j = 1, 2.$$

Relativamente a f, u_0, u_1, si suppone che

$$f = f_1+f_2, \quad f_1 \in W^{2,1}(0,T;V'), \; f_2 \in H^1(0,T;H),$$
$$u_0 \in V, \quad u_1 \in \mathcal{D}(B)$$

soddisfino le condizioni di compatibilità :

$$\text{Esiste } w_0 \in Bu_1: \; f(0) - w_0 - Au_0 \in \mathcal{D}(\varphi^*),$$
$$\text{dove } \varphi(v) = l(v,v)/2, \quad v \in H$$

(e quindi L è il sottodifferenziale della funzione convessa φ),$\mathcal{D}(\varphi^*)$ denota il dominio effettivo di $\varphi : H \to (-\infty, \infty]$, e

$$\varphi^*(v) = \sup_{z \in H} \{(v,z) - \varphi(z)\}.$$

Si dimostra, utilizzando un opportuno schema alle differenze finite, dopo convenienti stime *a-priori* , il

Teorema 1.1 *Valgano le ipotesi sopra richiamate. Allora il problema* (P) *ha una unica soluzione u, nel senso che*

$$u \in H^2(0,T;\, H) \cap W^{1,\infty}(0,T;\, V),$$
$$Lu''(t)+w(t)+Au(t) = f(t),$$
$$\textit{con} \quad w(t) \in Bu'(t) \text{ q.o. } \textit{in} \quad t \in (0,T),$$
$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1.$$

Cosa si può dire se B è <u>lineare</u> e si ricercano soluzioni <u>strette</u> del problema (P) in H, cioè si richiede che $u \in C([0,T] ; \mathcal{D}(A))$, $\exists\, u' \in C([0,T] ; \mathcal{D}(B))$, $\exists\, u''$ con $Lu'' \in C([0,T] ; H)$ e (P) è soddisfatto su [0,T], con f (almeno) continua da [0,T] <u>in H</u> ?

Poichè l'equazione in (P) varrà in H (e non in V') ci si aspetta di dover sostituire A con la sua parte A_H in H.

A tale questione è stato dedicato un paragrafo del lavoro di Colli e Favini [5].

Esporrò nel seguito i principali risultati che abbiamo conseguito sull'argomento.

2. Equazioni di tipo iperbolico-parabolico

Per chiarire ulteriormente la questione che i nostri teoremi generali permettono di trattare e risolvere, diamo un esempio concreto di equazione alle derivate parziali.

Esempio. Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, con frontiera regolare Γ.
Sia $T>0$ e siano $Q = (0,T) \times \Omega$, $\Sigma = (0,T) \times \Gamma$. Consideriamo il problema (iperbolico - parabolico)

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} K_1(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + K_2(x)\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(t,x), (t,x) \in Q, \\ u(0,x) = u_0(x), \; x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x), \; x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, \; (t,x) \in \Sigma, \end{cases}$$

dove $K_1(x)$, $K_2(x)$ sono date funzioni continue e non negative in $\bar{\Omega}$. Si noti che $K_1(x)$ e $K_2(x)$ potrebbero essere contemporaneamente nulle, oppure $K_1(x)>0$, $K_2(x)=0$ (caso iperbolico), oppure $K_1(x)=0$, $K_2(x)>0$, (caso parabolico), ecc.
C'é quindi da aspettarsi (e lo vedremo) che f, u_0, u_1 dovranno soddisfare condizioni di compatibilità molto stringenti affinchè $(\mathcal{P})$ abbia soluzione (stretta).
Precisiamo ora le ipotesi sugli operatori A,B,L. Fermo restando che (V,H,V') è la terna di Hilbert, assumeremo

(2.1) A è un operatore lineare continuo da V in V'.

(2.2) $\langle Au,v\rangle = \langle u, Av\rangle$ per ogni $u,v \in V$.

(2.3) $\langle Au,u\rangle \geq \omega \, \|u\|_V^2$ per ogni $u \in V$, con $\omega > 0$.

Qui, $\langle .,. \rangle$ denota come prima il prodotto interno in H e anche la dualità fra V' e V.
E' ben noto (vedi Barbu [1,p.289]) che se A_H indica la parte di A in H, cioè $\mathcal{D}(A_H) = \{u \in V; \; Au \in H\}$, $A_H u = Au$ per $u \in \mathcal{D}(A_H)$, e $A^{1/2}$ denota la "radice quadrata" di A_H, allora $\mathcal{D}(A^{1/2}) = V$ e $\langle Au,v\rangle = \langle A^{1/2}u, A^{1/2}v\rangle$ per ogni $u \in \mathcal{D}(A)$ e $v \in V$.
Veniamo alle proprietà di B e L.
Relativamente a B assumiamo

(2.4) B è un operatore lineare limitato da $\mathcal{D}(B)$ in H e $\mathcal{D}(A^{1/2})$ (=V) $\subseteq \mathcal{D}(B)$,

(2.5) Se $\langle Bv,v\rangle \geq 0$ per ogni $v \in V$.

Finalmente,

(2.6) L è un operatore limitato, autoaggiunto non negativo da H in sè.

Noi risolveremo, nello spazio H, il problema di Cauchy

(2.7) $Lw''(t) + Bw(t) + A_H w(t) = f(t)$, $0 \leq t \leq T < \infty$,

(2.8) $w(0) = u_0$, $w'(0) = u_1$,

dimostrando che sotto opportune ipotesi di regolarità e compatibilità sui dati, il problema (2.7), (2.8) ha una soluzione stretta $w \in C([0,T]; \mathcal{D}(A_H)) \cap C^2([0,T];H)$, $w'(t) \in \mathcal{D}(B)$ per ogni $t \in [0,T]$.

A tale fine, abbiamo bisogno di qualche ulteriore richiamo. La tecnica di prova relativa a (2.7), (2.8) è infatti basata su due fondamentali risultati di A.Yagi [12]. Richiamerò brevemente ciò che ci serve.

Denotiamo con X uno spazio di Hilbert (complesso) con prodotto interno $(,)_X$.

Dati $f \in C([0,T];X)$, $u_0 \in X$, consideriamo il problema

(2.9) $M^* \frac{d}{dt}(Mv(t)) + Kv(t) = M^* f(t)$, $0 \leq t \leq T$,

(2.10) $Mv(0) = u_0$,

dove M é un operatore lineare limitato da X in X, M^* é l'aggiunto di M e K é un operatore lineare chiuso da X in sé.

Inutile ripetere che una soluzione *stretta* di (2.9), (2.10) é una $v \in C([0,T]; \mathcal{D}(K))$ tale che $Mv \in C^1([0,T]; X)$ e valgono (2.9), (2.10).

Si noti che una soluzione stretta di (2.9), (2.10) soddisfa anche

$$M^* M v(0) = M^* u_0.$$

Il primo risultato di Yagi [12, Theorem 4.3, p.399] stabilisce

Proposizione 2.1 *Sia* M *limitato da* X *n sé,, sia* K *chiuso da* X*in* X *e valgano*

(2.11) $\mathrm{Re}\,(Kv,v)_X \geq \beta \,\| Mv \|_X^2$ *per ogni* $v \in \mathcal{D}(K)$,

(2.12) $\mathrm{imm}\,(\lambda_0 M^* M + K) \supseteq \mathrm{imm}\,(M^*)$ *per un* $\lambda_0 > -\beta$ *e* $(\lambda_0 M^* M + K)^{-1}$ *é un operatore univoco su* $\mathrm{imm}\,(M^*)$,

dove β *é un numero reale.*
Allora per ogni $f \in C([0,T];X)$ *e ogni* $u_0 = Mv_0$, *con* $v_0 \in \mathcal{D}(K)$ *e* $Kv_0 \in$
$\in$ imm (M^*), *il problema* (2.9), (2.10) *ha una unica soluzione stretta* v.

Osserviamo che dopo aver posto Mv = u, la (2.9) si trasforma in

$$M^* du/dt + KM^{-1}u \ni M^* f(t),$$

e quindi in

$$du/dt + (M^*)^{-1}KM^{-1}u \ni f(t)$$

e le condizioni (2.11), (2.12) dicono sostanzialmente che la trasformazione
$-A = -(M^*)^{-1}KM^{-1}$ genera un semigruppo quasi-contrattivo.

A cosa si possa dire su (2.9), (2.10) quando $M^* f(t)$ è sostituita con una arbitraria funzione g risponde la seconda affermazione di Yagi [12,Theorem 4.5, p.400].
Precisamente,

Proposizione 2.2 *Supponiamo* M *limitato da* X *in* X, K *lineare chiuso da* X*in sè , valga* (2.11) *e*
(2.13) $\lambda_0 M^* M + L$ *ha inverso limitato da* X *in* X *per un* $\lambda_0 > -\beta$.
Allora per ogni $g \in C^2([0,T];X)$ *e ogni* $v_0 = Mw_0$, *dove* $w_0 \in \mathcal{D}(K)$ *e* $Kw_0 - g(0) \in$
$\in$ imm (M^*), *il problema*

$$M^* \frac{d}{dt}(Mw(t)) + Kw(t) = g(t), \quad 0 \le t \le T,$$

$$Mw(0) = v_0$$

ha una unica soluzione stretta.

La Proposizione 2.2 segue dalla Proposizione 2.1 osservando che il cambiamento di variabile $v(t) = w(t) - (\lambda_0 M^* M + K)^{-1} g(t)$ trasforma $M^* \frac{d}{dt}(Mw(t)) + Kw(t) = g(t)$ in

$$M^* d(Mv(t))/dt + Kv(t) = g(t) - K(\lambda_0 M^* M + K)^{-1} g(t) - M^* M(\lambda_0 M^* M + K)^{-1} g'(t) =$$
$$= M^* f(t),$$

dove $f(t) = M(\lambda_0 M^* M + K)^{-1}\{\lambda_0 g(t) - g'(t)\}$.

Segue che nelle ipotesi della Proposizione 2.2 ha soluzione stretta anche il problema

$$\frac{d}{dt}(M^* Mw(t)) + Kw(t) = g(t), \quad 0 \le t \le T,$$

$$M^* Mw(0) = M^* v_0 = M^* Mw_0.$$

Vediamo ora che la Proposizione 2.1 consente di risolvere, sotto le assunzioni (2.1)-(2.6) il problema

$$\frac{d^2}{dt^2}(Lu(t)) + Bu'(t) + A_H u(t) = L^{1/2}f(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2.14}$$

$$u(0) = u_0, \; L^{1/2}u'(0) = L^{1/2}u_1 \tag{2.15}$$

in senso stretto, cioè tutti gli addendi a sinistra nella (2.14) sono continui da $[0,T]$ in H. Vale

Teorema 2.1 *Sia* $L \in \mathcal{L}(H)$ *non negativo autoaggiunto, sia* B *limitato da* $\mathcal{D}(A^{1/2})$ *in* H,

$$\mathrm{Re}\,\langle Bv, v\rangle \geq 0 \quad \textit{per ogni} \quad v \in \mathcal{D}(A^{1/2}) = V$$

e A *soddisfi* (2.1)-(2.3).
Se $f \in C^1([0,T];H)$, $u_0 \in \mathcal{D}(A_H)$, $u_1 = L^{1/2}v_1$ *e*

$$A_H u_0 + Bv_1 = L^{1/2}\bar{y},$$

con $v_1 \in \mathcal{D}(A_H)$ *e* $\bar{y} \in H$, *allora* (2.14), (2.15) *ha una unica soluzione stretta.*

Dimostrazione. Il problema (2.14), (2.15) si scrive

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & L^{1/2} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & L^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -I \\ A_H & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{bmatrix} = \tag{2.16}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ L^{1/2}f(t) \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & L^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & L^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}. \tag{2.17}$$

Prendiamo $X = V \times H$,
$\langle (x,y), (x_1,y_1)\rangle_X = \langle A^{1/2}x, A^{1/2}x_1\rangle + \langle y, y_1\rangle$, $(x,y), (x_1,y_1) \in X$,
$\mathcal{D}(M) = X$, $M(x,y) = (x, L^{1/2}y)$, $(x,y) \in X$,
$\mathcal{D}(K) = \mathcal{D}(A_H) \times V$, $K(x,y) = (-y, A_H x + By)$, $(x,y) \in \mathcal{D}(K)$.

Si vede facilmente che K è chiuso. Verifichiamo (2.11).
Se $(x,y) \in \mathcal{D}(K)$, allora

$$\mathrm{Re}\,\langle K(x,y),(x,y)\rangle_X = \mathrm{Re}\,\langle(-y,A_Hx+By),(x,y)\rangle_X =$$
$$= \mathrm{Re}\,\{\langle -A^{1/2}y, A^{1/2}x\rangle + \langle A^{1/2}x, A^{1/2}y\rangle + \langle By,y\rangle\} = \mathrm{Re}\,\langle By,y\rangle \geq 0 =$$
$$= 0 \cdot \|M(x,y)\|_X^2 .$$

Passiamo a (2.12). L'equazione

$$(\lambda_0 M^*M + K)(x,y) = (f_1,f_2) \in X$$

significa

$$\lambda_0 x - y = f_1 \in V, \quad \lambda_0 Ly + A_Hx + By = f_2.$$

Ora, dati $f_1 \in V$, $f_2 \in H$ e λ_0 positivo sufficientemente piccolo, tale sistema ha soluzione, poichè tutto si riduce alla invertibilità di $\lambda_0^2 L+\lambda_0 B+A_H$, che è ovvia conseguenza delle ipotesi.
Così per un λ_0 positivo e piccolo si ha imm $(\lambda_0 M^*M + K) = X$ e di qui (2.12). Le condizioni su u_0 e su u_1 sono allora ovvie conseguenze di quelle enunciate nella Proposizione 2.1. #

Con analogo ragionamento, utilizzando la Proposizione 2.2, si ottiene

Teorema 2.2 *Sotto le ipotesi* (2.1)-(2.6), *per ogni* $f \in C^2([0,T];H)$, $u_0 \in \mathcal{D}(A_H)$, $u_1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ *soddisfacenti la relazione di compatibilità*

$$f(0)-A_Hu_0-Bu_1 = L^{1/2}\,\bar{y},$$

per un certo elemento $\bar{y}$ *di* H, *il problema*

$$\frac{d^2}{dt^2}(Lu(t)) + Bu'(t) + A_Hu(t) = f(t),\ 0 \leq t \leq T,$$
$$u(0) = u_0,\ Lu'(0) = Lu_1$$

ha una soluzione stretta.

Siamo ora in grado di risolvere il problema di partenza (2.7), (2.8).

Teorema 2.3 *Valgano le ipotesi del* Teorema 2.1. *Se* $h \in C^2([0,T];H)$ *e* $u_0,u_1 \in \mathcal{D}(A_H)$ *soddisfano*

(2.18) $$L^{1/2}h(0)-Bu_1-A_Hu_0 = Lv_1,\ A_Hu_1 + Bv_1 = L^{1/2}\,\bar{y},$$

con $v_1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ *e* $\bar{y} \in H$, *allora il problema* (2.7), (2.8), *dove*

$$f(t) = L^{1/2}h(t), \; 0 \le t \le T,$$

ha una soluzione stretta.

Dimostrazione. In forza del Teorema 2.1, il problema

$$(2.19) \qquad \frac{d}{dt}(Lu'(t)) + Bu'(t) + A_H u(t) = L^{1/2}h'(t), \; 0 \le t \le T,$$

$$u(0) = u_1, \quad Lu'(0) = Lv_1$$

ha una soluzione stretta u. Integrando l'equazione (2.19) su (0,t) e sfruttando le relazioni (2.18), si ottiene quanto enunciato. #

Teorema 2.4 *Valgano su* A, B, L *le ipotesi dei Teoremi precedenti.Se* $f \in C^3([0,T];H)$, $u_0, u_1 \in \mathcal{D}(A_H)$ *ed esistono* $\bar{z} \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $\bar{y} \in H$ *tali che*

$$f(0)-A_H u_0-Bu_1 = L\bar{z}, \; f'(0)-A_H u_1-B\bar{z} = L^{1/2}\bar{y},$$

allora (2.7), (2.8) *ha una soluzione stretta.*

Dal Teorema 2.2 si ottiene anche un risultato di esistenza per il problema di Cauchy (del primo ordine)

$$(2.20) \qquad Bz'(t) + A_H z(t) = f(t), \; 0 \le t \le T,$$

$$(2.21) \qquad z(0) = u_0,$$

caso limite di (2.7), (2.8) con $L \equiv 0$. Esso va confrontato con quelli di Carroll e Showalter [3] e Showalter [11, p. 141], dove A è la mappa di Riesz dello spazio di Hilbert V, B è strettamente monotono da $\mathcal{D}(B)(\subseteq V)$ a V', con A + B suriettivo da $\mathcal{D}(B)$ a V' e, peraltro, viene considerata l'equazione più debole

$$(Bu)'(t) + Au(t) = f(t).$$

Teorema 2.5 *Supponiamo che* A *soddisfi* (2.1)-(2.3), *che* B *sia limitato da* $\mathcal{D}(A^{1/2})$ *in* H *e valga* (2.5).
Se $f \in C^3([0,T];H)$, $u_0 \in \mathcal{D}(A_H)$ *ed esistono* $u_1 \in \mathcal{D}(A_H)$, $\bar{y} \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ *tali che*

$$f(0)-A_H u_0-Bu_1 = f'(0)-A_H u_1-B\bar{y} = 0,$$

allora il problema (2.20), (2.21) *ha (almeno) una soluzione.*

Ritorniamo all'esempio di equazione di tipo iperbolico-parabolico considerato all'inizio del paragrafo.

Dal Teorema 2.4 segue che se $t \to f(t,\cdot)$ definisce una funzione di classe $C^{(3)}$ da $[0,T]$ in $H = L^2(\Omega)$ e per le date funzioni $u_0, u_1 \in \mathcal{D}(A_H) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, dove $A = -\Delta$ nel senso variazionale, $V = H_0^1(\Omega)$, esistono $\bar{z}(\cdot) \in V$, $\bar{y}(\cdot) \in H$ soddisfacenti

$$f(0,x) + \Delta u_0(x) - K_2(x) u_1(x) = K_1(x) \bar{z}(x), \ x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(0,x) + \Delta u_1(x) - K_2(x) \bar{z}(x) = K_1(x)^{1/2} \bar{y}(x), \ x \in \Omega,$$

allora il problema ($\mathcal{P}$) ha una soluzione stretta, nel senso che il problema astratto ad esso associato ha soluzione stretta.

Osservazione 2.1 Sarebbe molto interessante studiare (P) quando L è non limitato. Anche se (P) è stato ampiamente e recentemente considerato sia se L ha inverso limitato (vedi la monografia di Lagnese [6], dove vari modelli per equazioni alle derivate parziali (Kirchhoff, Mindlin - Timoshenko, von Karman, ...) sono trattati), sia quando L non è invertibile ([3]), in tutti questi lavori viene stabilita l'esistenza solo di soluzioni deboli, cioè l'equazione di (P) è vista in V'. D'altra parte, il problema della regolarità delle soluzioni ha ottenuto solo risposte parziali e rimane ancora aperto in generale.

Osservazione 2.2 Nello stesso ordine di idee della osservazione precedente, andrebbe studiata la regolarità delle soluzioni (in H) di

$$Lu''(t) + Bu'(t) + Au(t) = f(u(t)),$$

dove L, A sono lineari e f, B sono nonlineari.

Bibliografia

[1] V.Barbu, "Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces", Noordhoff, Leyden, 1976.

[2] A.Bensoussan, J.L.Lions, G.C.Papanicolau, Perturbations et "augmentation" des conditions initiales, in "Singular perturbations and boundary layer theory", LN in Mathematics 594, Springer, 1977, 10-29.

[3] R.W.Carroll, R.E.Showalter, "Singular and degenerate Cauchy problems", Academic Press, 1976.

[4] P.Colli, A.Favini, Time discretizzation of nonlinear Cauchy problems applying to mixed hyperbolic-parabolic equations, Preprint.

[5] P.Colli, A. Favini, On some degenerate second order equations of mixed type, Preprint.

[6] J.Lagnese, "Boundary stabilization of thin plates", SIAM, 1989.

[7] O.A.de Lima, Existence and uniqueness of solutions for an abstract nonlinear hyperbolic-parabolic equation, Appl. Anal. 24(1987), 101-116.

[8] J.L.Lions, W.A.Strauss, Some non-linear evolution equations, Bull. Soc. Math. France 9(1965), 43-96.

[9] A.B.Maciel, On hyperbolic-parabolic equation with a continuous nonlinearity, Nonlin. Anal. 20(1993), 745-754.

[10] L.A.Medeiros, Nonlinear hyperbolic-parabolic partial differential equations, Funkcial Ekvac. 23(1980), 151-158.

[11] R.E.Showalter, "Hilbert space methods for partial differential equations", Pitman, 1977.

[12] A.Yagi, Generation theorem of semigroup for multivalued linear operators, Osaka J.Math. 28(1991), 385-410.